Relativistische Verallgemeinerung des Lenzschen Vektors (II)

Eberhard Kern

Vereinigung der Technischen Überwachungs-Vereine, Essen

Z. Naturforsch. **39 a**, 733–747 (1984); received April 17, 1984

Relativistic generalisation of the Lenz vector (II)

The Lenz vector $\boldsymbol{\Lambda} = m\{\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{L} + \alpha \cdot \boldsymbol{x}/r\}$ is a special integral of motion of the non-relativistic Kepler problem. Accordingly, there also exists a special integral of motion $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ of the relativistic Kepler problem as pointed out in Part I of this paper. In the following Part II, the system of equations is compiled to the extent required for the relativistic generalisation of the Lenz vector and its interpretation.

Starting point are the statements of conservation for the energy and the angular momentum. From these two quantities, it is possible to derive the complete system of solutions $\boldsymbol{x}(t)$ in accordance with standardised methods. Some details and some modifications of the approach are of special importance for the purposes of this paper. In the centre of the consideration are the construction and interpretation of the standardised polar angle θ as a function of r, r'. The explicit time dependance of the functions $r(t)$, $\theta(t)$ is not required for constructing the relativistic Lenz vector in the form $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$.

In the literature, one does find only few, not sufficient for our purposes, data on the relativistic orbits (rosettes, spirals, hyperbola-type curves etc.). It is, therefore, necessary to discuss these orbits in detail. For this purpose, a series of relationships are derived which apparantly have not been published before.

Um die Systematik hervortreten zu lassen, wird das Formelsystem in Form von Tabellen zusammengestellt, in denen jeweils nebeneinander das nichtrelativistische und das relativistische Problem behandelt werden. Der Text beschränkt sich auf Erläuterungen zu den Tabellen.

Im folgenden werden die Abschnitte 1 bis 8 aus Teil I (siehe [1]) mit I.1, ..., I.8 zitiert.

1. Folgerungen aus dem Energiesatz und dem Drehimpulssatz (Tab. 1)

Es liegen zugrunde die Bewegungsgleichungen (1.1) bzw. (1.8), siehe Abschnitt I.1, für die nichtrelativistische bzw. relativistische Bewegung eines Elektrons (ohne Spin) im Coulomb-Feld eines ruhenden geladenen Kerns. Die Konstante $\alpha = e^z e$ ist das Produkt der Ladungen des Zentralkörpers (Kern) e^z und des Elektrons e.

Die mit den Gln. (T 1.1), (T 1.2) – in Verbindung mit der Ungleichung $r > 0$ – verträglichen Parameterwerte α, L, E bzw. α, L, $\mathscr{E}$ bilden den Bereich der „zulässigen Parameter“. Für $L > 0$ werden diese vollständig in den Tab. 3 und 4 angegeben. Der Fall $L = 0$ wird in den Abschnitten 10 bis 12 behandelt. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Parameter im zulässigen Bereich liegen. Das bedeutet für die bei der Integration auftretenden Funktionen, daß diese reell sind.

Aus den L-Bereichen der relativistischen Fälle A, B, C ist ersichtlich, daß das relativistische freie Teilchen ($\alpha = 0$) für $L > 0$ im Fall A enthalten ist.

Die in Gl. (T 1.5) eingeführte Konstante Λ ist der Betrag des Lenzschen Vektors $\boldsymbol{\Lambda}$ (Abschnitt I.3). Es gibt zwei Fälle, bei denen $\Lambda = 0$ wird: für $\alpha < 0$, $L \neq 0$ der Fall „Kreisbahn“ und für $\alpha = 0$, $L = 0$ der Fall „freies Teilchen auf einer Zentralbahn oder in Ruhe“.

Der Vorzeichenfaktor $\sigma(r')$, Gl. (T 1.10), wird unbestimmt für $r' = 0$. Dieser Fall kann nur für diskrete r-Werte (beim Sonderfall „Kreisbahn“ für alle r-Werte) auftreten, was keine Komplikationen verursacht.

2. Definition des normierten Polarwinkels θ (Tab. 2)

Wir gehen von dem in Tab. 1 benutzten allgemeinen Koordinatensystem K, in dem der Bahnvektor die Form $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ hat, über zu einem Koor-

---

Sonderdruckanforderungen an Dr. E. Kern, Schubertstraße 6, 4300 Essen 1.

0340-4811 / 84 / 0800-0733 $ 01.30/0. – Please order a reprint rather than making your own copy.

Tab. 1. Berechnung der Zeitableitung r' aus den Erhaltungsgrößen E bzw. $\mathcal{E}$ und L.

	nichtrelativistisches Problem	relativistisches Problem	Gl.
Energie $E, \mathcal{E}$	$E = \frac{1}{2} m \cdot \mathbf{x}'^2 + \alpha \frac{1}{r}$	$\mathcal{E} = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \alpha \frac{1}{r}$ mit $\beta = \sqrt{(\mathbf{x}'/c)^2}$	(T 1.1)
Betrag des Drehimpulses L	$L = m r \cdot \sqrt{\mathbf{x}'^2 - r'^2}$	$L = m r \cdot \sqrt{\left(\frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{r'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2}$	(T 1.2)
Folge aus (T 1.1), (T 1.2)	$r'^2 = 2 \cdot \frac{E - \alpha/r}{m} - \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{1}{r^2}$	$\left(\frac{r'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = c^2 \left\{\left(\frac{\mathcal{E} - \alpha/r}{m c^2}\right)^2 - 1 - \left(\frac{L}{m c}\right)^2 \frac{1}{r^2}\right\}$	(T 1.3)
Umformung von (T 1.3)	$L^2 m^2 \cdot r'^2 = \Lambda^2 - \left(L^2 \frac{1}{r} + \alpha m\right)^2$	$\left\{L^2 - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2\right\} m^2 \cdot \left(\frac{r'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = \Lambda^2 - \left(\left\{L^2 - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2\right\} \frac{1}{r} + \alpha m \cdot \frac{\mathcal{E}}{m c^2}\right)^2$	(T 1.4)
mit $\Lambda = \sqrt{\Lambda^2}$	$\Lambda^2 = \alpha^2 m^2 + L^2 m \cdot 2 E$	$\Lambda^2 = \alpha^2 m^2 + L^2 (m c)^2 \cdot \left\{\left(\frac{\mathcal{E}}{m c^2}\right)^2 - 1\right\}$	(T 1.5)
Zeitableitung r' für $L > 0$ Folge aus (T 1.4)	für $0 < L < \infty$ $r' = \sigma \cdot \frac{\sqrt{\Lambda^2 - \xi^2}}{L m}$ mit $\xi = L^2 \frac{1}{r} + \alpha m$	*Fall A* $\lvert\alpha\rvert/c < L < \infty$ $\frac{r'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sigma \cdot \frac{\sqrt{\Lambda^2 - \xi^2}}{\sqrt{L^2 - (\alpha/c)^2} \cdot m}$ mit $\xi = \left\{L^2 - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{r} + \alpha m \cdot \frac{\mathcal{E}}{m c^2}$	(T 1.6)
Folge aus (T 1.3)		*Fall B* $L = \lvert\alpha\rvert/c$ $\frac{r'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sigma \cdot c \sqrt{\xi}$ mit $\xi = \left(\frac{\mathcal{E}}{m c^2}\right)^2 - 1 - 2 \frac{\mathcal{E}}{m c^2} \frac{\alpha}{m c^2} \cdot \frac{1}{r}$	(T 1.7)
Folge aus (T 1.4)		*Fall C* $0 < L < \lvert\alpha\rvert/c$ $\frac{r'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sigma \cdot \frac{\sqrt{\xi^2 - \Lambda^2}}{\sqrt{(\alpha/c)^2 - L^2} \cdot m}$ mit $\xi = \left\{\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - L^2\right\} \cdot \frac{1}{r} - \alpha m \cdot \frac{\mathcal{E}}{m c^2}$	(T 1.8)
Zeitableitung r' für $L = 0$ Folge aus (T 1.3)	$r' = \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{E - \alpha/r}{m}}$	$\frac{r'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sigma \cdot c \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - \alpha/r}{m c^2}\right)^2 - 1}$	(T 1.9)
Vorzeichenfaktor σ	$\sigma = \operatorname{sign}(r') = r'/\sqrt{r'^2}$		(T 1.10)

Tab. 2. Einführung des normierten Polarwinkels θ (für den Bereich $L > 0$).

	nichtrelativistisches Problem	relativistisches Problem	Gl.
Betrag des Drehimpulses in Polarkoordinaten r, θ	$L = m\,r^2 \cdot \theta'$	$L = m\,r^2 \cdot \theta'/\sqrt{1-\beta^2}$	(T2.1)
Normierung von θ'	$\theta' > 0$		(T2.2)
Dgl. für θ Folge aus (T2.1)	$\mathrm{d}\theta = \dfrac{L}{m}\,\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{1}{r'} \cdot \mathrm{d}r$	$\mathrm{d}\theta = \dfrac{L}{m}\,\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{r'} \cdot \mathrm{d}r$	(T2.3)
Normierter Polarwinkel $\theta(r, r')$ Integration der Dgl. (T2.3)	für $0 < L < \infty$ $(\Lambda \neq 0)$ $\theta = \sigma \cdot \arccos \dfrac{L^2/r + \alpha\,m}{\Lambda}$	*Fall A* $\lvert\alpha\rvert/c < L < \infty$ $(\Lambda \neq 0)$ $\theta = \sigma \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-(\alpha/L\,c)^2}} \cdot \arccos \dfrac{\{L^2-(\alpha/c)^2\}/r + \alpha\,m \cdot \mathcal{E}/m\,c^2}{\Lambda}$	(T2.4)
		Fall B $L = \lvert\alpha\rvert/c$ $\theta = \mp\,\sigma \cdot \sqrt{1-\left(\dfrac{m\,c^2}{\mathcal{E}}\right)^2 - \dfrac{2\alpha}{\mathcal{E}}\,\dfrac{1}{r}}$	(T2.5)
Doppelvorzeichen für $\begin{cases}\text{Anziehung } (\alpha < 0)\\ \text{Abstoßung } (\alpha > 0)\end{cases}$		*Fall C* $0 < L < \lvert\alpha\rvert/c$ $\theta = \mp\,\sigma \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha/L\,c)^2-1}} \cdot \operatorname{Arch} \dfrac{\pm(\{(\alpha/c)^2 - L^2\}/r - \alpha\,m \cdot \mathcal{E}/m\,c^2)}{\Lambda}$	(T2.6)
Bahngleichungen Folge aus (T2.4), (T2.5), (T2.6)	für $0 < L < \infty$ $L^2\,\dfrac{1}{r} = -\,\alpha\,m + \Lambda \cdot \cos\theta$	*Fall A* $\lvert\alpha\rvert/c < L < \infty$ $\left\{L^2 - \left(\dfrac{\alpha}{c}\right)^2\right\}\dfrac{1}{r} = -\,\alpha\,m \cdot \dfrac{\mathcal{E}}{m\,c^2} + \Lambda \cdot \cos\left(\sqrt{1-(\alpha/L\,c)^2} \cdot \theta\right)$	(T2.7)
		Fall B $L = \lvert\alpha\rvert/c$ $\dfrac{2\alpha}{\mathcal{E}} \cdot \dfrac{1}{r} = 1 - \left(\dfrac{m\,c^2}{\mathcal{E}}\right)^2 - \theta^2$	(T2.8)
Doppelvorzeichen für $\begin{cases}\text{Anziehung } (\alpha < 0)\\ \text{Abstoßung } (\alpha > 0)\end{cases}$		*Fall C* $0 < L < \lvert\alpha\rvert/c$ $\left\{\left(\dfrac{\alpha}{c}\right)^2 - L^2\right\}\dfrac{1}{r} = \alpha\,m \cdot \dfrac{\mathcal{E}}{m\,c^2} \pm \Lambda \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{(\alpha/L\,c)^2-1} \cdot \theta\right)$	(T2.9)

dinatensystem K^N, dessen Achsen 1 und 2 die Bahnebene (senkrecht auf $\boldsymbol{L}$) aufspannen, $\boldsymbol{x}^N = (x_1^N, x_2^N, 0)$, und führen in der Ebene Polarkoordinaten r, θ ein:

$$\boldsymbol{x}^N = r(\cos\theta, \sin\theta)\,. \tag{2.1}$$

Der Index N soll andeuten, daß es sich um ein normiertes Koordinatensystem handelt, was weiter unten erläutert wird. Aus Gl. (T 2.1), die auch für $L = 0$ gültig ist, folgt

$$\theta = \text{const} \quad \text{für} \quad L = 0\,. \tag{2.2}$$

Das bedeutet, die Teilchenbahn liegt auf einer Geraden durch das Zentrum (Zentralbahn). Es ist zweckmäßig, den Fall $L = 0$ separat zu behandeln, da er eine Sonderstellung einnimmt: Für $L = 0$ ist keine Bahnebene definiert, und daher verliert der Polarwinkel θ seine Bedeutung, ausgenommen für den Grenzübergang $L \to 0$ (siehe Abschnitt 11). Aus diesem Grunde wird der Fall $L = 0$ im folgenden ausgeschlossen.

Die Normierung von θ', (T 2.2), bedeutet, daß die Teilchenbahn $\boldsymbol{x}^N(t)$ mit positivem Drehsinn des Winkels θ durchlaufen wird.

Die Dgl. (T 2.3) bekommt, wenn man r' bzw. $r'/\sqrt{1-\beta^2}$ aus Tab. 1 einsetzt, die Form

$$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = \sigma\, g(r)\,. \tag{2.3}$$

Der Vorzeichenfaktor $\sigma(r')$ rangiert hier als Konstante (unabhängig von r). Deshalb kann man die partielle Differentiation $\partial\theta(r, r')/\partial r$ als gewöhnliche Ableitung $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ schreiben. Wir setzen $\mathrm{d}f/\mathrm{d}r = g(r)$ und erhalten aus (2.3) nach Integration die Funktion $\theta(r, r')$ zunächst in der Form

$$\theta(r, r') = \sigma(r')\, f(r) + \varphi\,. \tag{2.4}$$

In Tab. 2 wurden die frei verfügbaren Integrationskonstanten φ bzw. φ^A, φ^B, φ^C für die Fälle A, B, C gleich Null gesetzt:

$$\theta(r, r') = \sigma(r')\, f(r)\,. \tag{2.5}$$

Das bedeutet eine Normierung des Polarwinkels $\theta(r, r')$: Wegen des Vorzeichenfaktors $\sigma = \pm 1$ gibt es zu jedem Kurvenpunkt mit den Polarkoordinaten r, θ einen gespiegelten Kurvenpunkt $r, -\theta$, oder anders ausgedrückt: $\sigma = +1$ liefert die eine Hälfte der Bahnkurve, $\sigma = -1$ die andere (gespielte) Hälfte.

Auf diese Weise bekommt das Koordinatensystem K^N eine normierte Orientierung. Die Achse 1 fällt zusammen mit der Symmetrieachse der Bahnkurven. Im Abschnitt I.8 wird die Einführung des normierten Koordinatensystems K^N unter einem anderen Aspekt diskutiert.

In Tab. 2 bedeuten $\operatorname{arccos}\mu$ und $\operatorname{Arch}\mu$ die Hauptwerte der Funktionen

$$\omega = \operatorname{arccos}\mu \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \omega \leqq \pi, \quad -1 \leqq \mu \leqq 1 \tag{2.6}$$

$$\omega = \operatorname{Arch}\mu \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \omega < \infty, \quad 1 \leqq \mu < \infty\,. \tag{2.7}$$

Unter Berücksichtigung des Vorzeichenfaktors $\sigma = \pm 1$ ergeben sich daraus für den Polarwinkel folgende Bereiche: Für das nichtrelativistische Problem

$$-\pi \leqq \theta \leqq \pi \tag{2.8}$$

und für das relativistische Problem

$$-\pi/\sqrt{1-(\alpha/L\,c)^2} \leqq \theta \leqq \pi/\sqrt{1-(\alpha/L\,c)^2} \quad \text{(Fall A)} \tag{2.9}$$

$$-\infty < \theta < \infty \quad \text{(Fall B u. C)}\,. \tag{2.10}$$

Mit den Festsetzungen (2.6), (2.7) wird erreicht, daß der normierte Polarwinkel θ für den ganzen Drehimpulsbereich $0 < L < \infty$ eine eindeutige Funktion von r, r' wird, was für die eindeutige Definition des Lenzschen Vektors wesentlich ist. Desgleichen ist die Normierung des Polarwinkels $\theta(r, r')$ für die Definition des Lenzschen Vektors wesentlich.

In (T 2.4) bedeutet die Einschränkung $\Lambda \neq 0$ den Ausschluß der Kreisbahn. Beim nichtrelativistischen Problem und beim relativistischen Fall A gehört der Wert $\Lambda = 0$ zwar zum Bereich der zulässigen Parameter, jedoch würde in (T 2.4) für $\Lambda = 0$ (mit der Folge $\xi = 0$) ein unbestimmter Ausdruck entstehen.

Für (T 2.5) braucht die Einschränkung $\mathscr{E} \neq 0$ nicht gemacht werden, da nur der Parameterbereich $\mathscr{E} > 0$ für $L = |\alpha|/c$ ein zulässiger Bereich ist (vgl. Tabelle 4). Desgleichen kann in (T 2.6) das im Nenner stehende Λ für $L < |\alpha|/c$ nicht gleich Null werden, was man aus der Definitionsgleichung (T 1.5) erkennt.

Der Vorzeichenfaktor $\sigma = \operatorname{sign}(r')$ läßt sich auch so formulieren, daß eine Zeitableitung nicht explizit auftritt:

$$\sigma = \pm 1 \quad \text{für} \quad \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r \gtrless 0\,, \tag{2.11}$$

was aus (T 2.3) folgt. Das bedeutet: $\sigma = +1$ auf dem auslaufenden Kurvenast (wo der Abstand r größer wird mit zunehmendem Winkel θ, d.h. wo das Teilchen sich vom Zentrum entfernt) und $\sigma = -1$ auf dem einlaufenden Kurvenast (wo r kleiner wird mit zunehmenden θ, d.h. wo das Teilchen auf das Zentrum zuläuft).

3. Gegenseitige Zuordnung der Funktionen $\theta\,(r, r')$ und $r\,(\theta)$, (Tab. 2)

Die relativistischen Bahngln. (T 2.7), (T 2.8), (T 2.9) findet man z. B. bei Landau u. Lifschitz [2]. Die Bahngln. (T 2.7) sind, im Gegensatz zu (T 2.4), auch für die Kreisbahn ($\Lambda = 0$) gültig.

Während der Übergang von den Funktionen $\theta\,(r, r')$ zu den Bahnfunktionen $r\,(\theta)$ der Tab. 2 zwanglos geht, ist die Umkehrung $r\,(\theta) \to \theta\,(r, r')$ nicht so einfach. Um das zu zeigen, berechnen wir den Winkel θ aus den Bahngleichungen.

Zunächst das nichtrelativistische Problem und der relativistische Fall A. Wir bestimmen den Hauptwert θ_{H} von θ aus der nichtrelativistischen Bahngl. (T 2.7) und den Hauptwert $\tilde{\theta}_{\mathrm{H}}$ von $\tilde{\theta} = \sqrt{1 - (\alpha/L\,c)^2} \cdot \theta$ aus der relativistischen Bahngl. (T 2.7)

$$\theta_{\mathrm{H}} = \arccos \mu \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\theta}_{\mathrm{H}} = \arccos \mu \tag{3.1}$$

mit

$$\mu = \frac{L^2 \dfrac{1}{r} + \alpha\, m}{\Lambda} \quad \text{bzw.} \tag{3.2}$$

$$\mu = \frac{\left\{L^2 - \left(\dfrac{\alpha}{c}\right)^2\right\} \dfrac{1}{r} + \alpha\, m \dfrac{\mathscr{E}}{m\, c^2}}{\Lambda}\,.$$

Bei vorgegebenem Wert von μ (im Bereich $-1 \leqq \mu \leqq 1$) folgt

$$\theta = \eta\, \theta_{\mathrm{H}} + n\, 2\pi \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\theta} = \eta\, \tilde{\theta}_{\mathrm{H}} + n\, 2\pi \tag{3.3}$$

mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und dem Vorzeichenfaktor $\eta = \pm 1$. η läßt sich durch den Vorzeichenfaktor $\sigma = \mathrm{sign}\,(r')$ ausdrücken. Zu dem Zweck berechnen wir die Zeitableitung der Bahngln. (T 2.7):

$$-L^2 \frac{1}{r^2}\, r' = -\Lambda \sin\theta \cdot \theta' \quad \text{bzw.} \tag{3.4}$$

$$-\left\{L^2 - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2\right\} \frac{1}{r^2}\, r' = -\Lambda \sin\tilde{\theta} \cdot \sqrt{1 - (\alpha/L\,c)^2} \cdot \theta'\,.$$

Berücksichtigt man, daß θ' gemäß (T 2.2) positiv ist, so erhält man aus (3.4) die Vorzeichenrelationen

$$\mathrm{sign}\,(r') = \mathrm{sign}\,(\sin\theta) \quad \text{bzw.}$$
$$\mathrm{sign}\,(r') = \mathrm{sign}\,(\sin\tilde{\theta})\,, \tag{3.5}$$

also unter Verwendung von (3.3)

$$\sigma = \mathrm{sign}\,(\eta \sin\theta_{\mathrm{H}}) \quad \text{bzw.}$$
$$\sigma = \mathrm{sign}\,(\eta \sin\tilde{\theta}_{\mathrm{H}})\,. \tag{3.6}$$

Aufgrund des Wertebereichs (2.6) für den Hauptwert folgt: $\sin\theta_{\mathrm{H}} \geqq 0$ bzw. $\sin\tilde{\theta}_{\mathrm{H}} \geqq 0$. Das Gleichheitszeichen kann nur für $\theta_{\mathrm{H}} = 0$ bzw. $\tilde{\theta}_{\mathrm{H}} = 0$ auftreten und braucht hier nicht berücksichtigt zu werden. Demnach liefern die Gln. (3.6) für beide Fälle $\sigma = \mathrm{sign}\,(\eta) = \eta$. Einsetzen in (3.3) ergibt endgültig

$$\theta = \sigma\, \theta_{\mathrm{H}} + n\, 2\pi \quad \text{bzw.}$$
$$\theta = \sigma \frac{\tilde{\theta}_{\mathrm{H}}}{\sqrt{1 - (\alpha/L\,c)^2}} + \frac{n\, 2\pi}{\sqrt{1 - (\alpha/L\,c)^2}} \tag{3.7}$$

für das nichtrelativistische Problem bzw. für den relativistischen Fall A.

Zu dem gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man von der Darstellung (2.11) des Vorzeichenfaktors $\sigma = \mathrm{sign}\,(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r)$ ausgegangen wäre und die Bahngln. (T 2.7) nach r differenziert hätte.

Die aus den Bahnfunktionen $r\,(\theta)$ gewonnenen Funktionen $\theta\,(r, r')$, Gln. (3.7), sind unbestimmt wegen des Faktors n. Sie unterscheiden sich darin von den in Tab. 2 angegebenen Funktionen (T 2.4). Um die Funktionen (3.7) eindeutig zu machen (und um sie zugleich mit den Funktionen $\theta\,(r, r')$ in Tab. 2 in Übereinstimmung zu bringen), setzen wir $n = 0$. Diese Normierung des Polarwinkels θ ist bereits in den Gln. (T 2.4) enthalten. Sie wirkt sich dort in der Beschränkung der Wertebereiche für den Polarwinkel aus, siehe (2.8), (2.9). Demgegenüber steht für die Bahngln. (T 2.7) der volle Wertebereich $-\infty < \theta < \infty$ des Polarwinkels zur Verfügung.

Die Beschränkung des Wertebereiche (2.8), (2.9) betrifft, wie man an Hand der Tab. 3 ersehen kann, nur den Energiebereich (1) bei den finiten Bahnkurven, die ganz im Endlichen liegen. Bei den übrigen (infiniten) Bahnkurven der Tab. 3 existiert ein Grenzwinkel θ^* (für $r \to \infty$), so daß die Wertebereiche (2.8), (2.9) vom Polarwinkel θ nicht überschritten werden.

Für die zum Energiebereich (1) gehörende Ellipse bzw. Rosette erhält man aus (T 2.4) die gesamte Bahnkurve $\theta\,(r)$ mit $-\infty < \theta < \infty$, indem man die durch (2.8) bzw. (2.9) gegebenen Bahnabschnitte periodisch fortsetzt. Bei der Ellipse kommen die Bahnabschnitte zur Deckung, bei der Rosette nicht. Das Letztere hat Konsequenzen für den Lenzschen Vektor, die in Abschn. I.6 diskutiert werden.

Wir kommen jetzt zu den relativistischen Fällen B und C. Aus den Bahnfunktionen $r\,(\theta)$, die durch (T 2.8), (T 2.9) gegeben sind, erhält man – nach dem gleichen Schema wie oben – direkt die zugehörigen Funktionen $\theta\,(r, r')$, (T 2.5), (T 2.6). Es tritt hier kein unbestimmter Periodizitätsparameter n auf. Die relativistischen Funktionen $\theta\,(r, r')$ und $r\,(\theta)$ sind also im Drehimpulsbereich $|\alpha|/L c \leqq L < \infty$ umkehrbar eindeutig zugeordnet.

4. Umnormierung des Polarwinkels $\theta\,(r, r')$, (Tab. 2)

Die durch (T2.7), (T2.8), (T2.9) gegebenen Bahnfunktionen $r\,(\theta)$ enthalten nicht mehr den Vorzeichenfaktor $\sigma = \pm 1$. Trotzdem liefern sie die Spiegelsymmetrie der Bahnkurven bezüglich der x_1^{N}-Achse in der Bahnebene K^{N}. Das liegt daran, daß die Bahnfunktionen gerade Funktionen sind: $r\,(\theta) = r\,(-\theta)$. Würde man von θ zu einem Polarwinkel $\theta - \varphi$ übergehen, so entspräche das einer Drehung der Bahnkurven um den Winkel φ. Um den gleichen Winkel würde sich die Symmetrieachse der Bahnkurven drehen.

Dem Übergang des Winkels

$$\theta \Rightarrow \theta - \varphi \tag{4.1}$$

in den Bahngleichungen der Tab. 2 entspricht eine Änderung der Funktion $\theta\,(r, r')$ in der Form

$$\begin{aligned} \theta\,(r, r') &= \sigma\,(r')\, f\,(r) \Rightarrow \\ \theta\,(r, r') &= \sigma\,(r')\, f\,(r) + \varphi\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Funktion $f\,(r)$ ist jeweils aus (T2.4), (T2.5), (T2.6) abzulesen. Die rechtsstehende Funktion $\theta\,(r, r')$ ist bereits in (2.4) notiert und dort diskutiert worden. Es gibt zwei Sonderfälle hinsichtlich des Winkels φ, bei denen die Normierung des Polarwinkels θ erhalten bleibt, bei denen also (4.2) eine Umnormierung des Polarwinkels beschreibt.

Erstens der Winkel $\varphi = \pm \pi$. Das entspricht einer Drehung der Bahnkurven um 180°. Bei dieser Drehung bleibt die Symmetrieachse (x_1^{N}-Achse) der Bahnkurven erhalten. Der Übergang

$$\theta \Rightarrow \theta \pm \pi \tag{4.3}$$

in den Bahngleichungen bedeutet demnach eine Umnormierung des Polarwinkels. An Stelle der Konstanten $\pm\pi$ kann man auch die Konstante $\pm\sigma\pi$ nehmen, denn der Vorzeichenfaktor $\sigma\,(r')$ ist (abschnittsweise) konstant. Der Übergang $\theta \Rightarrow \theta \pm \sigma\pi$ ist gleichbedeutend mit der Hinzufügung einer Integrationskonstanten $\mp\pi$ zu der Funktion $f\,(r)$ in (2.5):

$$\begin{aligned} \theta\,(r, r') &= \sigma\,(r')\, f\,(r) \Rightarrow \\ \theta\,(r, r') &= \sigma\,(r')\, \{f\,(r) \mp \pi\}\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Eine derartige Umnormierung des Polarwinkels ist erforderlich, wenn man einen stetigen Übergang von dem Formelsystem des relativistischen Problems zu dem des nichtrelativistischen Problems herstellen will (Abschnitt 12). Das Entsprechende gilt für den Lenzschen Vektor.

Zweitens der Winkel $\varphi = \pm\pi/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2}$ beim relativistischen Fall A, jedoch eingeschränkt auf den Energiebereich (1) für $\alpha < 0$ (Rosettenbahn), siehe Tabelle 3. Der Übergang

$$\theta \Rightarrow \theta \pm \pi/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2} \tag{4.5}$$

in den Bahngleichungen entspricht einer Drehung der Bahnkurven um den Winkel $\mp\pi/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2}$. Bei der Rosettenbahn bedeutet das, daß jetzt ein Aphel bei $\theta = 0$ liegt (vorher war es ein Perihel bei $\theta = 0$). In diesem Fall bleibt die Normierung des Polarwinkels erhalten, denn das Aphel liegt wieder auf einer Symmetrieachse der Rosettenbahn. Bei den übrigen Bahnkurven des Falles A (Spirale, hyperbelähnliche Kurve und Gerade) ist das nicht der Fall. Die Symmetrieachse dieser Kurven wird bei dem Übergang (4.5) um den Winkel

$$-\pi/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2} \quad \text{bzw.} \quad +\pi/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2}$$

aus der normierten Lage $\theta = 0$ herausgedreht. Infolgedessen entspricht der Übergang (4.5) für diese Bahnkurven keiner Umnormierung des Polarwinkels.

Beim Übergang (4.5) wechselt der Λ-Term in der Bahngl. (T2.7) des relativistischen Falles A sein Vorzeichen. Der entsprechende Vorzeichenwechsel des Λ-Terms tritt in der nichtrelativistischen Bahngl. (T2.7) bei der Umnormierung (4.3) ein. Es sei angemerkt, daß sich bei der Bahngl. (T2.9) des relativistischen Falles C das Vorzeichen des Λ-Terms nicht umkehren läßt, weil die hyperbolische Kosinusfunktion keine Periodizitätseigenschaften hat.

Nebenbei gesagt läßt sich das Doppelvorzeichen in der Bahngl. (T2.9) formal beseitigen, indem man $\pm\Lambda$ ersetzt durch

$$\begin{aligned} \pm\Lambda &= \frac{\alpha}{|\alpha|}\Lambda \\ &= \alpha \cdot \sqrt{m^2 + \left(\frac{L c}{\alpha}\right)^2 m^2 \cdot \left\{\left(\frac{\mathscr{E}}{m c^2}\right)^2 - 1\right\}}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

5. Grenzwinkel θ^* (für $r \to \infty$) und Asymptoten (Tab. 3 u. 4)

Die Tab. 3 und 4 enthalten die Auswertung der Bahngleichungen (T2.7) und (T2.8), (T2.9).

Die Einschränkung des zulässigen Drehimpulsbereichs für den Energiebereich (1) in Tab. 3 beruht darauf, daß die in (T 1.5) eingeführte Konstante Λ die Bedingung $\Lambda \geqq 0$ erfüllen muß. Das Gleichheitszeichen gilt für die Kreisbahn.

Die Ermittlung des in den Tab. 3 und 4 angegebenen Bereichs $0 < \theta^* < \pi/2$, den der relativistische Grenzwinkel θ^* für den Fall Abstoßung ($\alpha > 0$) annehmen kann, bedarf einer Erläuterung. Aus den Gleichungen für den Grenzwinkel θ^* folgt zunächst, daß die Winkelgrößen $\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}\cdot\theta^*$, θ^* und $\sqrt{(\alpha/Lc)^2-1}\cdot\theta^*$ für $\alpha > 0$ in den Bereichen

$$0 < \sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}\cdot\theta^* < \frac{\pi}{2} \quad \text{(Fall A)}, \quad (5.1)$$

$$0 < \theta^* < 1\left(<\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(Fall B)}, \quad (5.2)$$

$$0 < \sqrt{(\alpha/Lc)^2-1}\cdot\theta^* < \infty \quad \text{(Fall C)} \quad (5.3)$$

liegen. Für die Fälle A und C sind das die entsprechenden Bereiche der Hauptwerte. Aus (5.1) und (5.3) erhält man für die Bereiche des Grenzwinkels demnach

$$0 < \theta^* < \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}} \quad \text{(Fall A)}, \quad (5.4)$$

$$\theta < \theta^* < \infty \quad \text{(Fall C)}. \quad (5.5)$$

Diese Bereiche lassen sich wesentlich schärfer eingrenzen, wenn man den für den Fall Abstoßung zulässigen Energiebereich $mc^2 < \mathscr{E} < \infty$ in Betracht zieht. Für den Maximalwert $\theta^*_{\max}$, der bei vorgegebenem L für $\mathscr{E} \to \infty$ erreicht wird, gelten die Beziehungen:

$$\cos\eta^{\mathrm{A}} = |\alpha|/Lc\,, \quad \sin\eta^{\mathrm{A}} = \sqrt{1-(\alpha/Lc)^2} \quad \text{(Fall A)}, \quad (5.6)$$

$$\operatorname{ch}\eta^{\mathrm{C}} = |\alpha|/Lc\,, \quad \operatorname{sh}\eta^{\mathrm{C}} = \sqrt{(\alpha/Lc)^2-1} \quad \text{(Fall C)}, \quad (5.7)$$

mit $\eta^{\mathrm{A}} = \sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}\cdot\theta^*_{\max}$.

und $\eta^{\mathrm{C}} = \sqrt{(\alpha/Lc)^2-1}\cdot\theta^*_{\max}$.

Es folgt

$$\theta^*_{\max} = \frac{\eta^{\mathrm{A}}}{\sin\eta^{\mathrm{A}}} < \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad 0 < \eta^{\mathrm{A}} < \frac{\pi}{2} \quad \text{(Fall A)}, \quad (5.8)$$

$$\theta^*_{\max} = \frac{\eta^{\mathrm{C}}}{\operatorname{sh}\eta^{\mathrm{C}}} < 1 \quad \text{für} \quad 0 < \eta^{\mathrm{C}} < \infty \quad \text{(Fall C)}. \quad (5.9)$$

Damit erhält man – anstelle von (5.4), (5.5) – als zulässige Grenzwinkelbereiche:

$$0 < \theta^* < \frac{\pi}{2} \quad \text{(Fall A)}, \quad (5.10)$$

$$0 < \theta^* < 1\left(<\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(Fall C)}. \quad (5.11)$$

Wir können also feststellen: Beim Fall Abstoßung stimmt der Grenzwinkelbereich $0 < \theta^* < \pi/2$ für die relativistischen Bahnkurven (Fälle A, B, C) mit dem Grenzwinkelbereich der nichtrelativistischen Bahnkurve (Abstoßungs-Hyperbel) überein. Desgleichen stimmt der Bereich $-\theta^* < \theta < \theta^*$ des Polarwinkels θ überein. Das hat zur Folge, daß die relativistischen Bahnkurven beim Fall Abstoßung keine Spiralen, sondern hyperbelähnliche Kurven sind. Denn eine Spirale benötigt für einen Umlauf um das Zentrum mindestens den Bereich 2π für den Winkel θ.

Die Herleitung der in den Tab. 3 und 4 angegebenen Asymptotengleichungen (und der Nachweis, daß für die betreffenden Fälle Asymptoten existieren oder nicht existieren) bedarf hinsichtlich der relativistischen Bahnkurven längerer Rechnungen, die hier nicht wiedergegeben werden.

6. Symmetrieeigenschaften der Bahnkurven (Tab. 3 und 4)

Für die Symmetrieeigenschaften der Bahnkurven $r(\theta)$ ist die Existenz eines Perihels oder Aphels, bei denen $r' = 0$ wird, von Bedeutung.

Die Bahnkurven in Tab. 3 besitzen sämtlich ein Perihel $r_{\min}$ bei $\theta = 0$. Eine Ausnahme bildet der Grenzfall „Kreisbahn", für den kein ausgezeichnetes Perihel existiert. Bei der relativistischen Rosette ist zu beachten, daß diese unendlich viele (im Sonderfall endlich viele) Perihele besitzt, nämlich für die Winkel $\theta = n\,2\pi/\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Die Bahnkurven der Tab. 4 besitzen nur in zwei Fällen einen Extremwert von r, der jeweils bei $\theta = 0$ auftritt. Für den Fall Anziehung im Energiebereich (1) ein Aphel $r_{\max}$ und für den Fall Abstoßung ein Perihel $r_{\min}$.

Die getrennt auftretenden Spiralen in Tab. 4 besitzen keine Symmetrieachse. Jedoch hat der Wert

Tab. 3. Bahnkurven des nichtrelativistischen Problems und des relativistischen Falles A (für den Bereich $L > 0$).

	nichtrelativistisches Problem	relativistischer Fall A
Drehimpulsbereich	$0 < L < \infty$	$\|\alpha\|/c < L < \infty$
Fall $\alpha < 0$: Anziehung		
Energiebereich (1)	$-\infty < E < 0$	$0 < \mathscr{E} < m c^2$
zulässiger L-Bereich bei vorgeg. E bzw. $\mathscr{E}$	$L \leqq \|\alpha\| \cdot \sqrt{\dfrac{m}{2 \cdot \|E\|}}$	$L \leqq \dfrac{\|\alpha\|}{c} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-(\mathscr{E}/m c^2)^2}}$
Winkelbereich	$-\infty < \theta < \infty$	$-\infty < \theta < \infty$
Bahnkurve (Perihel für $\theta = 0$)	*Ellipse* (Grenzfall Kreis)	*Rosette* mit endlich vielen Umläufen um das Zentrum zwischen zwei Perihelen (Grenzfall Kreis)
Energiebereich (2)	$E = 0$	$\mathscr{E} = m c^2$
Winkelbereich	$-\theta^* < \theta < \theta^*$	$-\theta^* < \theta < \theta^*$
Grenzwinkel (für $r \to \infty$)	$\theta^* = \pi$	$\theta^* = \pi/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2}$
Bahnkurve (Perihel für $\theta = 0$)	*Parabel*	*offene Spirale* mit endlich vielen Umläufen um das Zentrum
Energiebereich (3)	$0 < E < \infty$	$m c^2 < \mathscr{E} < \infty$
Winkelbereich	$-\theta^* < \theta < \theta^*$	$-\theta^* < \theta < \theta^*$
Grenzwinkelbereich	$\pi/2 < \theta^* < \pi$	$(\pi/2)/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2} < \theta^* < \pi/\sqrt{1-(\alpha/L c)^2}$
Grenzwinkel (für $r \to \infty$)	$\cos\theta^* = -\dfrac{1}{\sqrt{1+(L/\alpha)^2 \cdot 2E/m}}$	$\cos\left(\sqrt{1-(\alpha/L c)^2} \cdot \theta^*\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\{(L c/\alpha)^2-1\} \cdot \{1-(m c^2/\mathscr{E})^2\}}}$
Gleichung der Asymptote: $x_2^{\mathrm{N}} = \pm \operatorname{tg}\theta^* \cdot (x_1^{\mathrm{N}} - k)$	$k = \dfrac{1}{\sin^2\theta^*} \cdot \dfrac{L^2}{\Lambda}$	$k = \dfrac{1}{\sin\theta^*} \cdot \dfrac{\sqrt{1-(\alpha/L c)^2}}{\sin\left(\sqrt{1-(\alpha/L c)^2} \cdot \theta^*\right)} \cdot \dfrac{L^2}{\Lambda}$
Bahnkurve (Perihel für $\theta = 0$)	*Anziehungs-Hyperbel* (Hyperbelast, der sich um das Zentrum windet)	*offene Spirale* mit endlich vielen Umläufen um das Zentrum
Fall $\alpha > 0$: Abstoßung		
Energiebereich	$0 < E < \infty$	$m c^2 < \mathscr{E} < \infty$
Winkelbereich	$-\theta^* < \theta < \theta^*$	$-\theta^* < \theta < \theta^*$
Grenzwinkelbereich	$0 < \theta^* < \pi/2$	$0 < \theta^* < \pi/2$
Grenzwinkel (für $r \to \infty$)	$\cos\theta^* = \dfrac{1}{\sqrt{1+(L/\alpha)^2 \cdot 2E/m}}$	$\cos\left(\sqrt{1-(\alpha/L c)^2} \cdot \theta^*\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\{(L c/\alpha)^2-1\} \cdot \{1-(m c^2/\mathscr{E})^2\}}}$
Gleichung der Asymptote: siehe oben	k: siehe oben	k: siehe oben
Bahnkurve (Perihel für $\theta = 0$)	*Abstoßungs-Hyperbel* (Hyperbelast, der sich vom Zentrum fortwindet)	*hyperbelähnliche Kurve* vom Typ der Abstoßungs-Hyperbel

Fall $\alpha = 0$: freies Teilchen		
Energiebereich	$0 < E < \infty$	$m c^2 < \mathscr{E} < \infty$
Winkelbereich	$-\theta^* < \theta < \theta^*$	$-\theta^* < \theta < \theta^*$
Grenzwinkel (für $r \to \infty$)	$\theta^* = \pi/2$	$\theta^* = \pi/2$
Gleichung der Bahn: $x_1^N = L^2/\Lambda = \text{const}$	$r \cdot \cos\theta = \dfrac{L}{\sqrt{m \cdot 2E}} = \text{const}$	$r \cdot \cos\theta = \dfrac{L}{m c} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(\mathscr{E}/m c^2)^2 - 1}} = \text{const}$
Bahnkurve (Perihel für $\theta = 0$)	*Gerade* parallel zur x_2^N-Achse im Abstand $r_{\min} = x_1^N$ vom Zentrum	*Gerade* parallel zur x_2^N-Achse im Abstand $r_{\min} = x_1^N$ vom Zentrum

$\theta = 0$ des normierten Polarwinkels auch hier eine Bedeutung. Die durch $\theta = 0$ gekennzeichnete Richtung in der normierten Bahnebene liegt auf der Symmetrieachse des Spiralenpaars. Speziell für den Energiebereich (3) fällt die Symmetrieachse mit der Winkelhalbierenden der Asymptoten zusammen. In Abschn. 8 werden wir zeigen, daß man das Paar getrennter Spiralen auch als eine einzige Teilchenbahn in Form einer Doppelspirale auffassen kann.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß sämtliche Bahnkurven für $L > 0$ eine Symmetrieachse bei $\theta = 0$ besitzen. Bei den relativistischen Spiralen kommt die Symmetrie darin zum Ausdruck, daß die Spiralen sämtlich aus zwei Ästen bestehen, die spiegelbildlich zueinander liegen.

Die dem Winkel $\theta = 0$ zugeordnete Richtung der Symmetrieachse ist durch den Einheitsvektor

$$\boldsymbol{\lambda}^N = (1, 0) \tag{6.1}$$

in der normierten Bahnebene K^N gegeben. Dies ist die Richtung des Lenzschen Einheitsvektors $\boldsymbol{\lambda}^N$, vgl. Abschnitt I.8.

7. Zusammenhang der relativistischen Fälle A, B, C (Tab. 3 und 4)

Zunächst die Fälle B und C (im Drehimpulsbereich $0 < L \leqq |\alpha|/c$). Aus Tab. 4 ist ersichtlich, daß die Bahnkurven der relativistischen Fälle B und C ihrem Typ nach übereinstimmen. Dieser Sachverhalt beruht darauf, daß die Bahngleichung (T 2.9) des Falles C beim Grenzübergang $L \to |\alpha|/c$ in die Bahngleichung (T 2.8) des Falles B übergeht.

Eine notwendige (und zugleich hinreichende) Bedingung für die Existenz eines Grenzwertes von (T 2.9) ist die Ungleichung $\mathscr{E} > 0$. Daß diese Bedingung notwendig ist, erkennt man, wenn man in (T 2.9) für L den Grenzwert $|\alpha|/c$ einsetzt. Der Grenzübergang für die Bahngleichung (T 2.9) → (T 2.8) verläuft zwanglos. Es gibt jedoch für $\alpha < 0$ eine Komplikation. Der Energiebereich (1) des Falles C ($-\infty < \mathscr{E} < m c^2$) erfüllt nicht die Bedingung $\mathscr{E} > 0$ und er unterscheidet sich von dem Energiebereich (1) des Falles B ($0 < \mathscr{E} < m c^2$). Trotzdem ist auch hier der Grenzübergang in Ordnung. Denn der Energiebereich (1) des Falles C geht für $L \to |\alpha|/c$ in den Energiebereich (1) des Falles B über. Das hängt damit zusammen, daß die Bahnkurve des Falles C im Energiebereich $\mathscr{E} \leqq 0$ auf den

Tab. 4. Bahnkurven der relativistischen Fälle B und C (für den Bereich $L > 0$).

	relativistischer Fall B	relativistischer Fall C
Drehimpulsbereich	$L = \lvert\alpha\rvert/c$	$0 < L < \lvert\alpha\rvert/c$
Fall $\alpha < 0$: Anziehung		
Energiebereich (1)	(B) $0 < \mathcal{E} < m\,c^2$	(C) $-\infty < \mathcal{E} < m\,c^2$
Winkelbereich	(B) $-\infty < \theta < \infty$	(C) $-\infty < \theta < \infty$
Bahnkurve (Aphel für $\theta = 0$)	*geschlossene Spirale* mit unendlich vielen Umläufen um das Zentrum: vom Zentrum zum Aphel (auslaufender Spiralast $-\infty < \theta \leqq 0$) und vom Aphel zum Zentrum (einlaufender Spiralast $0 \leqq \theta < \infty$) (Die Bahnkurve läßt sich – bei periodischer Fortsetzung – interpretieren als geschlossene Spirale mit unendlich vielen Umläufen um das Zentrum zwischen zwei Aphelen.)	
Energiebereich (2)	(B), (C) $\mathcal{E} = m\,c^2$	
zwei getrennte Winkelbereiche	(B), (C) $-\infty < \theta < 0$ für die auslaufende Spirale (vom Zentrum ins Unendliche); $0 < \theta < \infty$ für die einlaufende Spirale (vom Unendlichen ins Zentrum)	
Grenzwinkel (für $r \to \infty$)	(B), (C) $\theta^* = 0$	
Bahnkurve	*zwei getrennte Spiralen* jeweils mit unendlich vielen Umläufen um das Zentrum (Die Bahnkurve läßt sich interpretieren als offene Doppelspirale mit einem einlaufenden und einem auslaufenden Spiralast.)	
Energiebereich (3)	(B), (C) $m\,c^2 < \mathcal{E} < \infty$	
zwei getrennte Winkelbereiche	(B), (C) $-\infty < \theta < -\theta^*$ für die auslaufende Spirale (vom Zentrum ins Unendliche); $\theta^* < \theta < \infty$ für die einlaufende Spirale (vom Unendlichen ins Zentrum)	
Grenzwinkelbereich	(B), (C) $0 < \theta^* < 1$ $(< \pi/2)$	
Grenzwinkel (für $r \to \infty$)	(B) $\theta^* = \sqrt{1 - (m\,c^2/\mathcal{E})^2}$	(C) $\mathrm{ch}\,(\sqrt{(\alpha/L\,c)^2 - 1}\cdot\theta^*) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \{1 - (L\,c/\alpha)^2\}\cdot\{1 - (m\,c^2/\mathcal{E})^2\}}}$
Gleichung der Asymptote: $x_2^N = \pm\,\mathrm{tg}\,\theta^*\cdot(x_1^N + k)$	(B) $k = \dfrac{1}{\sin\theta^*}\cdot\dfrac{1}{\theta^*}\cdot\dfrac{\lvert\alpha\rvert}{\mathcal{E}}$	(C) $k = \dfrac{1}{\sin\theta^*}\cdot\dfrac{\sqrt{(\alpha/L\,c)^2 - 1}}{\mathrm{sh}\,(\sqrt{(\alpha/L\,c)^2 - 1}\cdot\theta^*)}\cdot\dfrac{L^2}{\Lambda}$
Bahnkurve	*zwei getrennte Spiralen* jeweils mit unendlich vielen Umläufen um das Zentrum (Die Bahnkurve läßt sich interpretieren als offene Doppelspirale mit einem einlaufenden und einem auslaufenden Spiralast.)	
Fall $\alpha > 0$: Abstoßung		
Energiebereich	(B), (C) $m\,c^2 < \mathcal{E} < \infty$	
Winkelbereich	(B), (C) $-\theta^* < \theta < \theta^*$	
Grenzwinkelbereich	(B), (C) $0 < \theta^* < 1$ $(< \pi/2)$	
Grenzwinkel (für $r \to \infty$)	(B) θ^*: siehe oben	(C) $\mathrm{ch}\,(\sqrt{(\alpha/L\,c)^2 - 1}\cdot\theta^*)$: siehe oben
Gleichung der Asymptote: $x_2^N = \pm\,\mathrm{tg}\,\theta^*\cdot(x_1^N - k)$	(B) k: siehe oben	(C) k: siehe oben
Bahnkurve (Perihel für $\theta = 0$)	*hyperbelähnliche Kurve* vom Typ der Abstoßungs-Hyperbel	

Nullpunkt zusammenschrumpft (und damit verschwindet), weil der Aphelabstand $r_{\max} \to 0$ geht, wenn $L \to |\alpha|/c$ geht. Wir gehen auf Einzelheiten nicht ein.

Wir betrachten jetzt die Fälle A und B (im Drehimpulsbereich $|\alpha|/c \leqq L < \infty$). Aus den Tab. 3 und 4 ist ersichtlich, daß die Bahnkurven der relativistischen Fälle A und B nur im Falle der Abstoßung ($\alpha > 0$) bezüglich ihres Kurventyps (hyperbelähnliche Kurve) übereinstimmen. Dieser Sachverhalt beruht darauf, daß die relativistische Bahngleichung (T2.7) des Falles A beim Grenzübergang $L \to |\alpha|/c$ in die Bahngleichung (T2.8) des Falles B übergeht, falls $\alpha > 0$ ist.

Die Bedingung $\alpha > 0$ ist notwendig (und zugleich hinreichend) für die Existenz eines Grenzwertes von (T2.7). Daß die Bedingung notwendig ist, erkennt man, wenn man in (T2.7) für L den Grenzwert $|\alpha|/c$ einsetzt. Der zulässige Energiebereich für $\alpha > 0$ ist in beiden Fällen (A und B) derselbe: $m c^2 < \mathscr{E} < \infty$, so daß es hier keine Komplikationen gibt.

Zusammenfassend können wir über den Zusammenhang der relativistischen Fälle A, B, C folgende Aussage machen: Der Fall B ist als Grenzfall im Fall C enthalten. Bei Abstoßung ($\alpha > 0$) ist der Fall B als Grenzfall auch im Fall A enthalten. Bei Anziehung ($\alpha < 0$) gibt es keinen stetigen Übergang zwischen den Fällen A und B. Diese Verhältnisse übertragen sich auf die Stetigkeitseigenschaften der relativistischen Funktion $\theta(r, r')$ in Tab. 2.

Es ist noch der Fall $\alpha = 0$ (relativistisches freies Teilchen) nachzutragen. Er ist für den Drehimpulsbereich $0 < L < \infty$ als Spezialfall im Fall A enthalten. Hier gibt es keinen Zusammenhang mit den Fällen B und C (weil diese nur für $\alpha \neq 0$ definiert sind).

8. Physikalische Interpretation der relativistischen Fälle B und C für $\alpha < 0$ (Anziehung), (Tab. 4)

Wir diskutieren die Bahngleichungen (T2.8) und (T2.9) der relativistischen Fälle B und C für $\alpha < 0$ (Anziehung). Die zugehörigen Bahnkurven (Spiralen), Tab. 4, machen bei Annäherung an das Zentrum $r \to 0$ unendlich viele Umläufe $\theta \to \pm\infty$. Im Zentrum wird die Geschwindigkeit $v = \sqrt{\boldsymbol{x}'^2}$ gleich der Lichtgeschwindigkeit c, was man aus der relativistischen Energiegleichung (T1.1) erkennt. Das Zentrum (und die Lichtgeschwindigkeit) bei $r = 0$ wird von dem Teilchen auch wirklich erreicht. Denn die Zeit, die das Teilchen – ausgehend von einer endlichen Entfernung r – auf seiner Spiralbahn bis ins Zentrum braucht, ist endlich. Das erkennt man, wenn man (T1.3) und (T1.1) umformt

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1-\beta^2}\,\sigma \sqrt{\left(\frac{\mathscr{E} - \alpha(1/r)}{m c}\right)^2 - c^2 - \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{1}{r^2}} \tag{8.1}$$

mit

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m c^2}{\mathscr{E} - \alpha(1/r)} \tag{8.2}$$

und die entstehende Differentialgleichung für $t(r)$

$$\mathrm{d}t = \sigma \frac{1}{c} \frac{\mathscr{E} - \alpha(1/r)}{\sqrt{(\mathscr{E} - \alpha(1/r))^2 - (m c^2)^2 - (L c)^2 (1/r^2)}}\,\mathrm{d}r \tag{8.3}$$

integriert. Dabei hat man $\alpha < 0$ und $L \leqq |\alpha|/c$ zu berücksichtigen. Wir gehen auf Einzelheiten nicht ein.

Die Tatsache, daß in den Fällen B und C das relativistische Teilchen bei Anziehung die Lichtgeschwindigkeit erreicht, führt auf Konsequenzen, die physikalisch nicht mehr akzeptabel sind. Zum Beispiel hätte das Teilchen auf der geschlossenen Spirale im Energiebereich (1) nur eine endliche Lebensdauer oder, andere Interpretation, es hat eine unendliche Lebensdauer, indem es die durch den geladenen Kern gehende Spiralbahn periodisch (unendlich oft) durchläuft.

Die relativistische Bewegungsgleichung (1.8), Abschn. I.1, ist hier nicht mehr akzeptabel, weil bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit die Retardierung der Wechselwirkung zwischen den geladenen Teilchen und, damit zusammenhängend, die Mitbewegung des Kerns berücksichtigt werden müßten. Außerdem kann eine klassische Beschreibung der Bewegung keine relativistischen Quanteneffekte, die hier eine wesentliche Rolle spielen würden, erfassen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich jedoch in erster Linie mit den mathematischen Konsequenzen aus der relativistischen Bewegungsgleichung (1.8), so daß die physikalischen Bedenken zurückgestellt werden können. In diesem Sinne wollen wir für die paarweise auftretenden, getrennten Spiralen in den Energiebereichen (2) und (3), Tab. 4, noch eine andere Interpretation der Teilchenbahn $\boldsymbol{x}(t)$ geben.

Da die einzelne Spiralbahn – von einer endlichen Entfernung r ausgehend – bis ins Zentrum in endlicher Zeit durchlaufen wird, können wir an die einlaufende Spirale (vom Unendlichen bis ins Zentrum) die auslaufende Spirale (vom Zentrum ins Unendliche) anfügen. Man bekommt auf diese Weise eine einzige Bahnkurve in Form einer offenen Doppelspirale. Wenn man diese Interpretation der Spiralbahn zugrunde legt, läßt sich auch in diesem Fall der Lenzsche Vektor $\boldsymbol{\Lambda}$ als Symmetrieachse der Bahnkurve geometrisch deuten, siehe Abschnitt I.7.

Man kann nun die Bahnkurven $\boldsymbol{x}(t)$ folgendermaßen als Teilchenbahnen interpretieren: Die einlaufende Spirale ($\theta = \theta^* \ldots \infty$) repräsentiert ein Teilchen mit unendlicher Lebensdauer ($t = -\infty \ldots 0$), das bei einer bestimmten Zeit ($t = 0$) verschwindet. Die auslaufende Spirale ($\theta = -\infty \ldots -\theta^*$) repräsentiert ein Teilchen mit unendlicher Lebensdauer ($t = 0 \ldots \infty$), das bei einer bestimmten Zeit ($t = 0$) entsteht. Die Doppelspirale ($\theta = \theta^* \ldots \infty, -\infty \ldots -\theta^*$) repräsentiert ein Teilchen mit unendlicher Lebensdauer ($t = -\infty \ldots 0 \ldots \infty$), das stabil ist.

Zusammenfassend können wir feststellen: Auch die Bahnkurven der relativistischen Fälle B und C (mit $L \leqq |\alpha|/c$), die für $\alpha < 0$ (Anziehung) durch das Zentrum gehen, lassen sich als Bahnkurven stabiler Teilchen (mit unendlicher Lebensdauer $t = -\infty \ldots \infty$) interpretieren – genau wie das bei den übrigen relativistischen Bahnkurven der Fälle A, B, C und bei den nichtrelativistischen Bahnkurven der Fall ist.

9. Physikalische Interpretation der relativistischen Drehimpulsgrenze $L = |\alpha|/c$ für $\alpha < 0$ (Anziehung), (Tab. 3 und 4)

Bei der nichtrelativistischen Bewegung bleibt das umlaufende Teilchen, wenn es einen nichtverschwindenden Drehimpuls ($L > 0$) besitzt, stets in einem endlichen Abstand (Perihel) vom Zentralkörper. Bei der relativistischen Bewegung ist das anders.

Bei Anziehung ($\alpha < 0$) bildet der relativistische Drehimpuls $L = |\alpha|/c$ die Grenze zwischen den Bahnkurven, die in einem endlichen Abstand vom Zentrum bleiben (für $L > |\alpha|/c$), und denen, die durch das Zentrum $r = 0$ gehen (für $L \leqq |\alpha|/c$). Die zuerst genannten Bahnkurven (Fall A, Tab. 3), die ein Perihel besitzen, sind die Rosette und die offene Spirale mit endlich vielen Umläufen um das Zentrum. Die zuletzt genannten Bahnkurven (Fälle B und C, Tab. 4), die kein Perihel besitzen, sind die geschlossene und die offene Spirale mit jeweils unendlich vielen Umläufen um das Zentrum.

Bei Abstoßung ($\alpha > 0$) spielt die relativistische Drehimpulsgrenze $L = |\alpha|/c$ für die Gestalt der Bahnkurven keine Rolle: die relativistischen Bahnkurven sind hyperbelähnliche Kurven (für $0 < L < \infty$) mit endlichem Abstand vom Zentrum, ganz ähnlich wie die Hyperbelbahn bei der nichtrelativistischen Bewegung.

Wir denken jetzt an ein relativistisches Elektron im Feld einer positiven Punktladung $Z\,e$. Der Elektronenspin bleibt außer Betracht. Aus quantenmechanischen Gründen hat das Elektron den ganzzahligen Bahndrehimpuls $L = n\,\hbar$ mit $n = 1, 2, \ldots$ für $L > 0$. Dann liefert die Drehimpulsgrenze $L = |\alpha|/c$ mit $|\alpha| = Z\,e^2$ die Beziehung

$$n\,\hbar = Z\,(e^2/c)\,. \tag{9.1}$$

Das heißt, nur für Atomkerne mit einer Kernladungszahl

$$Z < \hbar\,c/e^2 \approx 137 \tag{9.2}$$

wird die Drehimpulsbarriere $L = |\alpha|/c$ überschritten, so daß das Elektron nicht in den Kern „fallen“ kann. Es handelt sich um die Rosettenbahn (gebundener Zustand) und die offenen Spiralen (Analogon zur Parabel bzw. Hyperbel der nichtrelativistischen Bahnkurven) des relativistischen Falles A für $\alpha < 0$.

Diese Überlegung vermittelt eine gewisse Analogie zur quantenmechanischen Behandlung des relativistischen Problems, vgl. Greiner [3].

10. Das nichtrelativistische Problem als Grenzfall (für $c \to \infty$) des relativistischen Problems (Tab. 2)

Aus dem Vergleich der Bewegungsgleichungen für das nichtrelativistische Problem (1.1) und für das relativistische Problem (1.8), siehe Teil I, ist ersichtlich, daß (1.8) in (1.1) übergeht, wenn man die Lichtgeschwindigkeit c formal gegen Unendlich gehen läßt. Es sollten dann auch die relativistischen Bahngleichungen in die nichtrelativistische Bahngleichung (Tab. 2) übergehen. Das Entsprechende gilt für die Bahnkurven (Tab. 3 u. 4) und für den Polarwinkel $\theta\,(r, r')$ (Tab. 2). Jedoch gibt es eine Komplikation bei $L = 0$.

Zunächst der Fall $L > 0$ ($0 < L < \infty$). Wir betrachten den Grenzfall der relativistischen Bahngleichungen für die Fälle A, B, C (Tab. 2), indem wir die Konstante c (bei vorgegebener Wechselwirkungskonstanten α) nach Unendlich gehen lassen. Wegen $L > 0$ scheiden die relativistischen Fälle B und C, die den L-Bereich $0 < L \leqq |\alpha|/c$ und den α-Bereich $\alpha \neq 0$ umfassen, für den Grenzübergang $c \to \infty$ aus. Es bleibt die relativistische Bahngleichung (T2.7) für den Fall A übrig, der denselben L-Bereich $0 < L < \infty$ und denselben α-Bereich $\alpha \gtreqqless 0$ wie die nichtrelativistische Bahngleichung umfaßt.

Wir haben bereits berücksichtigt, daß für $c \to \infty$ der relativistische Drehimpuls L mit dem nichtrelativistischen Drehimpuls L übereinstimmt, siehe Tabelle 1. Anders ist es mit der relativistischen Energie $\mathscr{E}$. Wir setzen

$$E = \mathscr{E} - m\,c^2 \tag{10.1}$$

und können jetzt den Grenzübergang $c \to \infty$ vollziehen. Dabei geht die relativistische Energie E in die nichtrelativistische Energie E über.

Um den Grenzübergang für die relativistische Bahngleichung (T2.7) des Falles A durchzuführen, hat man zunächst die Größe $\mathscr{E}$ gemäß (10.1) durch E zu ersetzen und dann $c \to \infty$ gehen zu lassen. Dabei fällt die Konstante c heraus und man erhält die nichtrelativistische Bahngleichung (T2.7). Damit ist gezeigt, daß die drei relativistischen Bahngleichungen der Fälle A, B, C für $L > 0$ in die nichtrelativistische Bahngleichung übergehen, mit anderen Worten, daß das nichtrelativistische Problem für den Drehimpulsbereich $0 < L < \infty$ als Grenzfall im relativistischen Problem enthalten ist, wie es sein muß.

Wir behandeln jetzt den Fall $L = 0$ (Zentralbahn). Die Bahngleichungen bzw. die Formeln für den Polarwinkel θ (Tab. 2) reduzieren sich auf die Beziehung $\theta = \text{const}$ (Gerade durch das Zentrum). Bei dem Formelsystem der Tab. 2 bis 4 haben wir – um einfache Verhältnisse zu bekommen – den Fall $L = 0$ ausgeschlossen. Das Formelsystem liefert aber auch die θ-Werte für $L = 0$, indem man $L \to 0$ gehen läßt. Diese Werte $\theta\,(L = 0)$ (je drei für das nichtrelativistische und für das relativistische Problem, entsprechend den drei Parameterbereichen $\alpha \gtreqqless 0$) werden in Abschn. 11 berechnet.

In Abschn. 12 wird der Übergang $c \to \infty$ bei den relativistischen $\theta\,(L = 0)$-Werten vollzogen. Es zeigt sich, daß diese Grenzwerte nur in den Parameterbereichen $\alpha > 0$ und $\alpha = 0$ mit den nichtrelativistischen $\theta\,(L = 0)$-Werten übereinstimmen, nicht aber im Bereich $\alpha < 0$ (Anziehung). Das hängt damit zusammen, daß es für $\alpha < 0$ keinen stetigen Zusammenhang zwischen den Fällen A und B gibt.

Diese Diskrepanz sollte beseitigt werden, wenn man – insbesondere im Hinblick auf den Lenzschen Vektor – wünscht, daß das Formelsystem beim Übergang vom relativistischen zum nichtrelativistischen Problem für den gesamten zulässigen L-Bereich $0 \leqq L < \infty$ (also auch auf dem Rand $L = 0$) konsistent sein soll. Das läßt sich durch eine Umnormierung des Polarwinkels θ erreichen (Abschnitt 12).

11. Die Zentralbahn ($L = 0$) als Grenzfall für den Übergang $L \to 0$ (Tab. 2)

In Tab. 2 ist der normierte Polarwinkel $\theta\,(r, r')$ für den Drehimpulsbereich $L > 0$ definiert. Wir berechnen die Grenzwerte von θ für den Übergang $L \to 0$ bei vorgegebener Wechselwirkungskonstanten α. Aufgrund von (2.2) ist klar, daß diese Grenzwerte konstant, also unabhängig von r sind: $\theta\,(L = 0) = \text{const}$ (genauer gesagt, abschnittsweise konstant, wegen des Vorzeichenfaktors $\sigma(r')$, der weiter unten erläutert wird).

Nichtrelativistisches Problem. Aus (T2.4) folgen – bei vorgegebenen Werten von $\alpha = 0$, $\alpha < 0$, $\alpha > 0$ – für $L \to 0$ die Grenzwerte:

$$\theta\,(L = 0) = \sigma\,(\pi/2) \qquad \text{für} \quad \alpha = 0\,, \tag{11.1}$$

$$\theta\,(L = 0) = \begin{cases} \sigma\,\pi \\ 0 \end{cases} \qquad \text{für} \quad \begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha > 0\,. \end{cases} \tag{11.2}$$

Relativistisches Problem. Bei vorgegebenem Wert von $\alpha = 0$ erhält man für $L \to 0$ den Grenzwert $\theta\,(L = 0)$ aus (T2.4) des Falles A. Die Fälle B und C kommen für den Grenzübergang $L \to 0$ bei $\alpha = 0$ nicht in Frage, da sie nur für $\alpha \neq 0$ definiert sind.

Unter der Voraussetzung $\alpha \neq 0$ erhält man den Grenzwert $\theta\,(L = 0)$ aus (T2.6) des Falles C, indem man in (T2.6) $L \to 0$ gehen läßt. Die Fälle A und B kommen für den Grenzübergang $L \to 0$ bei $\alpha \neq 0$ nicht in Frage, da Fall A nur für $L > |\alpha|/c$ und Fall B nur für $L = |\alpha|/c$ definiert ist, so daß beide Fälle nur für $L \neq 0$ anwendbar sind.

Man erhält demnach folgende Grenzwerte für das relativistische Problem:

$$\theta\,(L = 0) = \sigma\,(\pi/2) \qquad \text{für} \quad \alpha = 0\,, \tag{11.3}$$

$$\theta\,(L = 0) = 0 \qquad \text{für} \quad \alpha \lessgtr 0\,. \tag{11.4}$$

Der Grenzwert (11.4) bedarf einer Erläuterung. Berechnet man den θ-Wert aus (T 2.6) für $L \approx 0$, so erhält man zunächst

$$\theta \approx \sigma \frac{L c}{\alpha} \operatorname{Arch} \left\{ \frac{\mathscr{E}}{m c^2} - \frac{\alpha}{m c^2} \frac{1}{r} \right\} . \tag{11.5}$$

Das läßt sich auch, unter Verwendung von (T 1.1), in der Form schreiben

$$\theta \approx \sigma \frac{L c}{\alpha} \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{11.6}$$

Für den Fall $\alpha > 0$ (Abstoßung), d.h. für die hyperbelähnliche Bahnkurve, gilt stets $r > 0$ (mit der Folge $\beta < 1$), so daß man aus (11.5) oder (11.6) unmittelbar für den Grenzwert $\theta\,(L=0) = 0$ erhält.

Für den Fall $\alpha < 0$ (Anziehung), d.h. für die Spiralbahnen mit unendlich vielen Umläufen um das Zentrum $r = 0$, muß man die Umgebung von $r = 0$ gesondert betrachten. Für $r \approx 0$ (mit $r \neq 0$) bzw. für $\beta \approx 1$ (mit $\beta < 1$) erhält man ebenfalls $\theta(L=0) = 0$. Jedoch wird der Grenzwert $\theta(L=0)$ unbestimmt für $r = 0$ $(\beta = 1)$. Die Spiralwindungen schrumpfen aber, wenn man zu $L \to 0$ übergeht, auf einen infinitesimal kleinen Bereich um das Zentrum zusammen und verschwinden für $L = 0$ (wir gehen auf Einzelheiten der Kurvendiskussion nicht ein). Damit ist der Grenzwert (11.4) auch für den Fall $\alpha < 0$ gerechtfertigt.

Im Hinblick auf (11.1), (11.2) und (11.3), (11.4) können wir also feststellen, daß bei vorgegebener Konstanten α ($\alpha = 0$, $\alpha < 0$, $\alpha > 0$) jeweils ein eindeutiger Grenzwert des Polarwinkels $\theta\,(L=0)$ existiert. Damit ist die Funktion $\theta\,(r, r')$ im gesamten zulässigen Drehimpulsbereich $0 \leqq L < \infty$ eindeutig definiert.

Für den relativistischen Grenzwert $\theta\,(L=0)$ bei $\alpha = 0$ ist der Fall A maßgebend, für die relativistischen Grenzwerte bei $\alpha < 0$ und $\alpha > 0$ der Fall C. Der Fall B hat auf die Grenzwerte $\theta\,(L=0)$ keinen Einfluß, jedoch ist er stetig mit dem Fall C verbunden.

Noch eine Bemerkung zur Interpretation der Grenzwerte $\theta\,(L=0)$, die die Bahnkurven der Tab. 3 und 4 für den Grenzübergang $L \to 0$ darstellen.

Die durch $\theta\,(r') = \sigma\,(r')\,\pi/2$ beschriebene Bahnkurve (11.1), (11.3) des freien Teilchens ($\alpha = 0$) ist eine Gerade, die mit der x_2^{N}-Achse zusammenfällt. Der Faktor $\sigma = \operatorname{sign}(r')$ legt fest, in welcher Richtung die Gerade durchlaufen wird. $\sigma = -1$ beschreibt den einlaufenden Kurvenast, $\sigma = +1$ den auslaufenden Kurvenast. Der Richtungssinn der Bahnkurve stimmt also überein mit dem Richtungssinn der x_2^{N}-Achse.

Für den Fall Abstoßung ($\alpha > 0$) ist die durch $\theta = 0$ beschriebene Bahnkurve (11.2), (11.4) eine Halbgerade mit einem endlichen Abstand vom Zentrum ($r_{\min} < r < \infty$). Sie liegt auf der positiven Seite der x_1^{N}-Achse.

Für den Fall Anziehung ($\alpha < 0$) ist die Bahnkurve ein Geradenstück ($0 \leqq r < r_{\max}$ im Energiebereich (1)) oder eine Halbgerade ($0 \leqq r < \infty$ in den Energiebereichen (2) und (3)). Die Bahnkurve, die entweder in Richtung auf das Zentrum ($\sigma = -1$) oder in entgegengesetzter Richtung ($\sigma = +1$) durchlaufen wird, liegt auf der x_1^{N}-Achse. Die durch (11.2) beschriebene Bahnkurve liegt auf der negativen Seite, die Bahnkurve (11.4) auf der positiven Seite der x_1^{N}-Achse.

12. Umnormierung des Polarwinkels $\theta\,(r, r')$ im Hinblick auf den Lenzschen Vektor (Tab. 2)

Wir interessieren uns jetzt für den Übergang $c \to \infty$ vom relativistischen zum nichtrelativistischen Problem. Da die relativistischen Grenzwerte (11.3), (11.4) nicht von c abhängen, gelten sie auch für $c = \infty$. Wie im Abschn. 10 dargelegt, sollte das Formelsystem des relativistischen Problems beim Grenzübergang $c \to \infty$ stetig in das des nichtrelativistischen Problems übergehen. Ein Vergleich der Grenzwerte (11.1), (11.2) mit den Grenzwerten (11.3), (11.4) zeigt, daß das nicht der Fall ist. Es besteht Übereinstimmung für $\alpha \geqq 0$, keine Übereinstimmung für $\alpha < 0$ (Anziehung).

Diese Diskrepanz läßt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf zweierlei Weise beseitigen, indem man den Polarwinkel $\theta\,(r, r')$ für den Bereich $\alpha < 0$ umnormiert, vgl. Abschnitt 4.

Variante 1. Der Polarwinkel wird nur beim relativistischen Problem (für $\alpha < 0$) umnormiert. Bei den Fällen B und C ersetzen wir die durch (T 2.5), (T 2.6) gegebenen Funktionen $\theta\,(r, r') = \sigma\,(r')\,f\,(r)$ durch die Funktionen

$$\theta\,(r, r') = \sigma\,(r')\,f\,(r) + \sigma\,(r')\,\pi \quad \text{für} \quad \alpha < 0 . \tag{12.1}$$

Die übrigen relativistischen Funktionen $\theta\,(r, r')$ (des Falles A für $\alpha \lesseqgtr 0$ sowie die Fälle B und C für

$\alpha > 0$) werden – ebenso wie die nichtrelativistische Funktion $\theta(r, r')$ – unverändert übernommen. Damit gehen die relativistischen Grenzwerte $\theta(L = 0)$ – siehe (11.3), (11.4) – über in die nichtrelativistischen Grenzwerte (11.1), (11.2) und stimmen jetzt mit diesen überein.

Variante 2. Der Polarwinkel wird sowohl beim nichtrelativistischen als auch beim relativistischen Problem (jeweils für $\alpha < 0$) umnormiert. Beim nichtrelativistischen Problem und beim relativistischen Fall A ersetzen wir die durch die Gln. (T 2.4) gegebenen Funktionen $\theta(r, r') = \sigma(r') f(r)$ durch die Funktionen

$$\theta(r, r') = \sigma(r') f(r) - \sigma(r') \pi \quad \text{für} \quad \alpha < 0 . \tag{12.2}$$

Die übrigen Funktionen $\theta(r, r')$ (des nichtrelativistischen Problems für $\alpha \geqq 0$ und des relativistischen Falles A für $\alpha \geqq 0$ sowie der relativistischen Fälle B und C) werden unverändert übernommen. Damit gehen die nichtrelativistischen Grenzwerte $\theta(L = 0)$ – siehe (11.1), (11.2) – über in die relativistischen Grenzwerte (11.3), (11.4) und stimmen jetzt mit diesen überein.

Bei der Variante 1 haben wir den Polarwinkel θ auch für den relativistischen Fall B und bei der Variante 2 auch für den relativistischen Fall A (jeweils für $\alpha < 0$) umnormiert, obwohl dies auf die relativistischen Grenzwerte (11.3) und (11.4) keinen Einfluß hat. Damit wird erreicht, daß bei der Variante 1 der stetige Übergang vom Fall C zum Fall B (Abschn. 7) und bei der Variante 2 der stetige Übergang vom relativistischen zum nichtrelativistischen Problem (Abschn. 10) erhalten bleibt.

Im Hinblick auf die relativistische Verallgemeinerung des Lenzschen Vektors Λ, bei der vom nichtrelativistischen Vektor Λ ausgegangen und dieser beibehalten wird, kommt für die Umnormierung nur die Variante 1 in Frage. Diese Umnormierung des Polarwinkels θ bedeutet für die relativistischen Bahnkurven (der Fälle B und C im Bereich $\alpha < 0$), daß diese um den Winkel 180° in der Bahnebene K^{N} gedreht werden. Der Lenzsche Einheitsvektor $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{N}} = (1, 0)$, Gl. (6.1), bleibt unverändert. Er zeigt jetzt, wenn wir die geschlossene Spirale im Energiebereich (1) als Beispiel nehmen, nicht mehr zum Aphel, sondern in die entgegengesetzte Richtung.

Bei dem in einem allgemeinen Koordinatensystem K definierten Lenzschen Vektor Λ ist die Situation genau umgekehrt (siehe Abschnitt I.4). Die Bahnkurven sind vorgegeben und bleiben daher bei der Hinzufügung des additiven Terms $\sigma\pi$ zu dem „Lenzschen Winkel" θ gemäß (12.1) unverändert. Der Lenzsche Einheitsvektor $\boldsymbol{\lambda}$ hingegen wird dabei um 180° gedreht, d.h. er kehrt seine Richtung um. Jedoch bleibt die relative Orientierung beider Vektoren $\boldsymbol{\lambda}$ bzw. $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{N}}$ zur Symmetrieachse der Bahnkurven die gleiche. Der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ zeigt bei der Spirale, ebenso wie $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{N}}$, in die zum Aphel entgegengesetzte Richtung.

[1] E. Kern, Z. Naturforsch. **39 a,** 720 (1984), (Teil I).
[2] L. D. Landau u. E. M. Lifschitz, Lehrbuch d. Theor. Physik, Bd. 2, Akademie-Verlag, Berlin 1973.
[3] W. Greiner, Theoret. Physik, Bd. 3, Verlag Harri Deutsch, Thun u. Frankfurt (Main) 1982.